

* کتاب ریاضی عمومی ۱ - نویسنده آقای محمد علی کریم جامیان - انتشارات آهنگ قلم ریاضی و مهندسی
فصل (۱) توابع فصل (۲) عددی و شکلی فصل (۳) مشتق فصل (۴) انتگرال

فصل اول توابع و Function

مجموعه تابع یا برد تابع $\rightarrow$ ورودی تابع یا دامنه تابع $\rightarrow$

$$y = f(x) \rightarrow \text{تابع } f \text{ تابع}$$

دامنه تابع: مجموعه ورودی های مجاز یک تابع را دامنه تابع نویسیم و برای تابع f ، دامنه کن را با D_f نشان می دهیم.

برد تابع: مجموعه خروجی یک تابع به ازای مقادیر ورودی های مجاز را برد تابع می نویسیم و برای تابع f ، کن را با R_f نشان می دهیم.

برخی توابع مهم ریاضی:

① تابع چند جمله ای: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

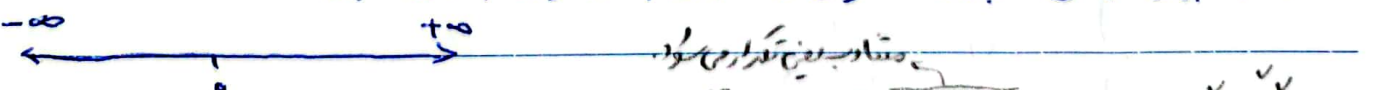
که a_i ها ضرایب چند جمله ای هستند و $n \in \mathbb{N}$

مثال: $f(x) = 2x - 2 \rightarrow$ تابع چند جمله ای درجه ۱

$f(x) = 3x^2 - 1 \rightarrow$ تابع چند جمله ای درجه ۲ (مربعی)

$f(x) = x^5 \rightarrow$ تابع چند جمله ای درجه ۵

* دامنه تابع چند جمله ای، مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ می باشد. $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$



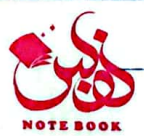
مقادیر زیر را در نظر بگیرید

$\frac{99}{28} = 3,5714285714285714$ اعداد گویا

$\sqrt{2} = 1,4142135623730950$ اعداد ننگارنی

$e = 2,718$ عدد

$\pi = 3,14$ عدد



Subject:



Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

② توانع رادیکالی (توانع کسری را می توانیم توانع رادیکالی بنویسیم)

$$\frac{1}{\sqrt[2]{x}} = \sqrt[2]{x^{-1}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{9}}$$

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \rightarrow n \in \mathbb{N} - \{1\}$$

توانع رادیکالی ←

$$n \text{ فرد} \Rightarrow D_f = D_g$$

$$n \text{ زوج} \Rightarrow D_f = \{x \mid g(x) \geq 0\}$$

* متغیر رادیکال های صفت مجاز نیست.

$$\sqrt{-2} \text{ غلط}$$

$$\sqrt[3]{-2} \text{ درست}$$

$$* \text{ مثال: } f(x) = \sqrt{x-1} \rightarrow D_f = \{x \mid x \geq 1\}$$

$$* \text{ چون } f(x) = \sqrt[3]{1-x} \rightarrow D_f = \mathbb{R} \text{ یعنی } \mathbb{R} \text{ را می پوشاند}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \rightarrow x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$$

③ تابع کسری

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2} \\ f(x) = \frac{x-1}{2x+2} \\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$



NAFAS

نکته: قدری نشده $\frac{10}{10} = 1$ و $\frac{0}{10} = 0$ - خرج توابع کسری نباید منفز شود یعنی اعدادی که خرج این عبارت حار منفز می کنند منفز اولی تابع نیستند.

مثال: $f(x) = \frac{x-1}{2x+5} \rightarrow 2x+5=0 \rightarrow 2x=-5 \rightarrow x=-\frac{5}{2}=-2.5 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2.5\}$

$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x-3} \rightarrow x^2-2x-3=0 \rightarrow (x-3)(x+1) \rightarrow \begin{cases} x-3=0 \rightarrow x=3 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases}$

$\rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

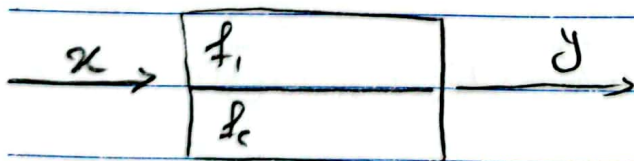
$f(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \rightarrow D_f = \{x | x > 1\} = (1, +\infty)$

$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} \rightarrow \begin{aligned} x-2 &\neq 0 \rightarrow x \neq 2 \\ x-2 &\geq 0 \rightarrow x \geq 2 \end{aligned}$

$\rightarrow D_f = \{x | x \geq 2, x \neq 2\} = (2, +\infty) = [2, +\infty) - \{2\}$



⑤ تابع هینز تابعی:



مثال: طبق منابع $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 2x+3, & x < 1 \end{cases}$

و $f(2)$ یعنی x باید در تابعی که $x \geq 1$ باشد استفاده کنیم در $x=2$ و $x < 1$ بود که از $x=2$ استفاده نمی کنیم.

$f(2) = 2-1=1$

Subject:

Year.

Month.

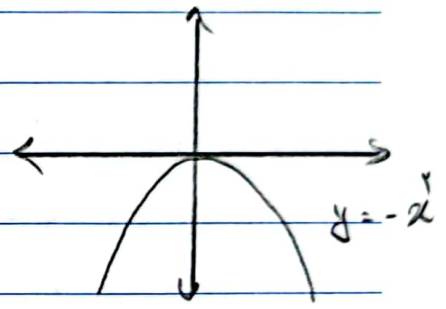
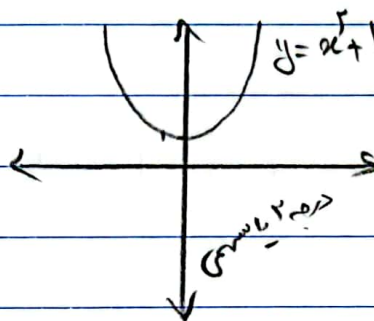
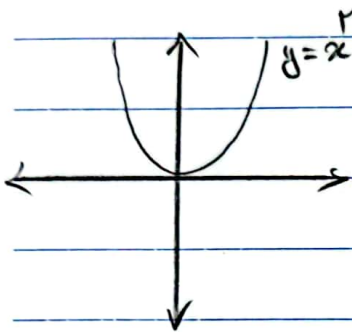
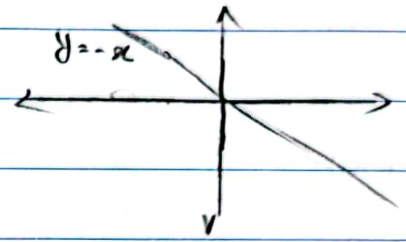
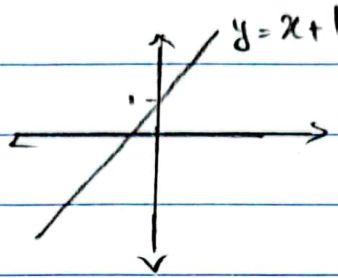
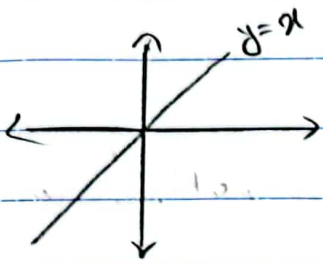
Date.



Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$f(-1) = 2x + 3 \rightarrow 2(-1) + 3 = -1$$

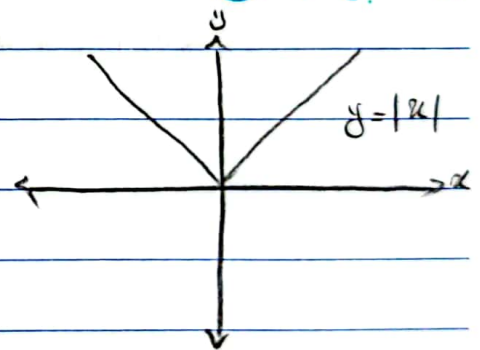
رسم نمودار برای از توابع:



۱۴۰۲، ۷، ۲۷

۵) تابع قدر مطلق

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$



* تابع قدر مطلق دارای معنی ندارد فقط برای اعداد حقیقی می توان استفاده کرد

۶) تابع جزء صحیح یا توابع پله ای

$$f(x) = [x] \quad ; \quad n \leq x < n+1 \rightarrow [x] = n$$



$$\text{مثال: } x = -1.25 \rightarrow -2 < -1.25 < -1 \rightarrow [-1.25] = -2$$



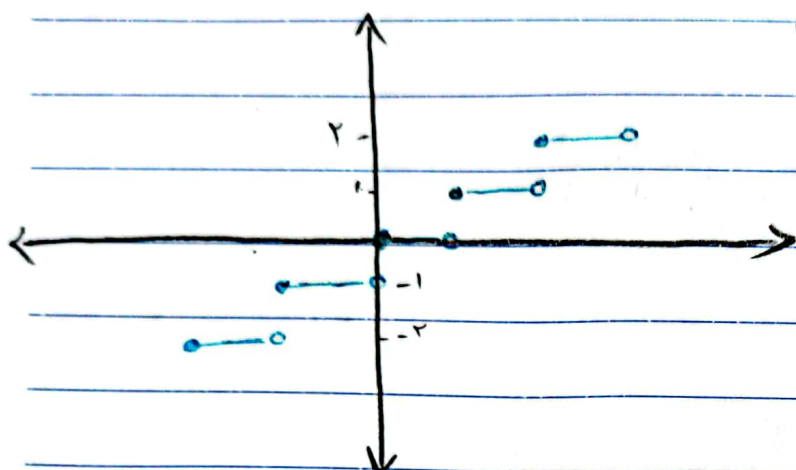
NAFAS

* در تابع جزوه ص ۱۲۵ و ص ۱۲۶ با سه مثال خود فرس

$$۲ = [۲] = ۲$$

$$۱ = [۱۲۵] = ۱$$

هم شکل توابع جزوه ص ۱۲۵ و ص ۱۲۶ با سه مثال



⑦ توابع لگاریتمی :

$$\textcircled{۳} \quad ۲ = ۸ \quad \xrightarrow{\text{امثال لگاریتمی}} \quad \log_2 ۸ = ۳$$

$$y = \log_a x \rightarrow a > 0, a \neq 1, x > 0$$

* لگاریتم‌های که معکوس یکدیگرند برابر ۱ در نظر گرفته می‌شوند

و لگاریتم‌های که معکوس یکدیگرند برابر ۱ در نظر گرفته می‌شوند

$$\log_a a = 1 \quad \text{لگاریتم ۱ در هر صیغی (a) برابر صفر است}$$

$$a = \log_a a \quad \text{لگاریتم هر عدد (a) در صیغی خودش (a) برابر ۱ است}$$

Subject:



Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_c(ab) =$$

$$\log_c a = \log_c a + \log_c 1$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_c a = \log_c \frac{a}{1} = \log_c a - \log_c 1 = a - \log_c 1$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1 \times 3}{2 \times 4} = \frac{3}{8}$$

$$\log_b a^n = \frac{n}{m} \log_b a$$

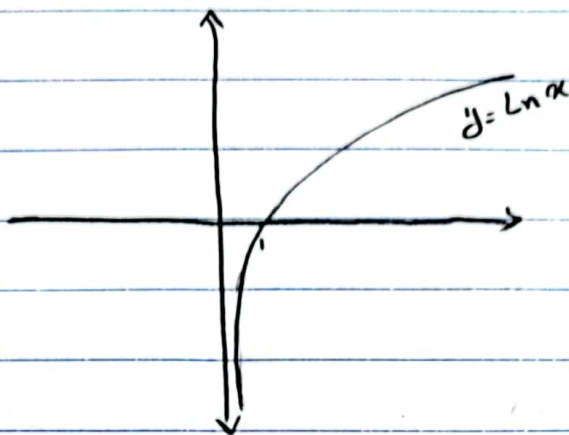
$$\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2 \times 1 = 2$$

$$e \approx 2.718 \rightarrow \log_e x = \ln x$$

نوع طبیعی

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \ln e = 1 \end{cases}$$

شکل تاریم تابعی :

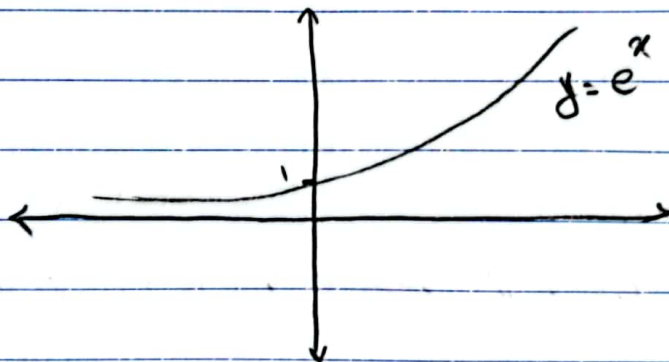


* $\ln x$ صفتی داریم اما صفتی نداریم.

نمبر $e \approx 2.718$

$$y = e^x$$

تاریم تابعی :



شکل تاریم تابعی :

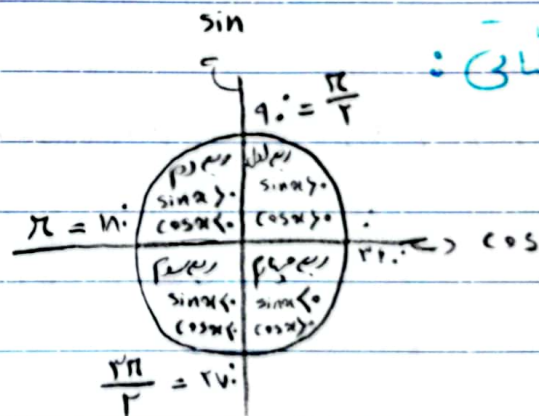
* شکل با این محور یعنی اکید فرضی صفتی نیست.

$$\sin x \rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\cos x \rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$



توابع مثلثاتی :

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{360}$$

واحدهای اندازه گیری دایره : درجه، رادیان، گراد
G R D

Svbject:

Year.

Month.

Date.



Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$\sin k\pi = 0, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos k\pi = \begin{cases} 1 & ; \text{زوج } k \\ -1 & ; \text{فرد } k \end{cases}$$

α	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	1

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

۱۴۰۲/۸/۱۴

تابع زوج و فرد: بازه یا مجموعه متناهی برابر A را متناهی می‌گویند هرگاه اگر $\alpha \in A$ آنگاه $-\alpha \in A$

مثال: $[-1, 1]$ و $(-1, 1)$

نکته: $[a, a]$ و $(-a, a)$ متناهی هستند مثال: $[-2, 2]$ و $(-2, 2)$

تابع زوج: تابعی که با دایره تعریف D_f بازه توپیم هرگاه:

الف) D_f بی‌نهایت متناهی باشد

ب) $f(-\alpha) = f(\alpha)$

به طور ساده تابعی زوج است که با تبدیل α به $-\alpha$ ضابطه تابع تغییر نکند

مثال: تابع $f(x) = x^2 + 1$ تابع زوج است. $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$



NAFAS

Subject:



Year.

Month.

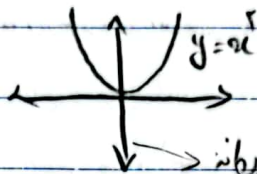
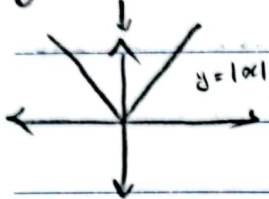
Date.

Sa	Sa	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

مثال: $f(x) = |x|$ یک تابع زوج است. اثبات: $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

مثال: تابع $f(x) = \cos x$ یک تابع زوج است. اثبات: $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$

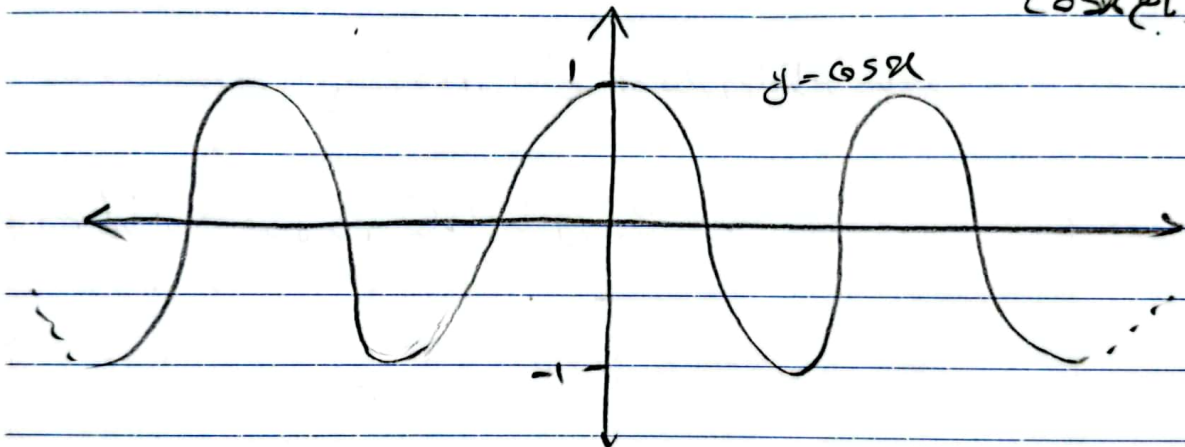
نمودار محور مختصات



توجه: نمودار توابع زوج نسبت به محور y ها، متقارن است.

نمودار محور مختصات

نمودار تابع $\cos x$



نمودار $\cos x$ همواره محور y ها، متقارن است.

مثال: تابع $f(x) = |x| \cdot \cos x$ زوج است.

توابع فرد: تابع f را با دامنه تعریف D_f یک تابع فرد می‌گویند هرگاه:

الف) D_f دامنه f متقارن باشد.

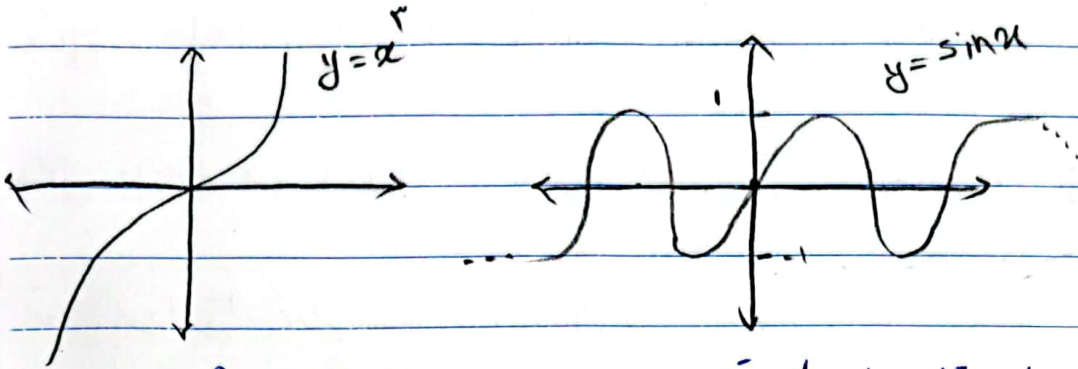
ب) $f(-x) = -f(x)$

مثال: $f(x) = x^3$ ، $f(x) = \sin x$ ، $f(x) = x$ توابع فرد هستند.



توجه: نمودار توابع فرد نسبت به محور x متقارن است.

NAFAS



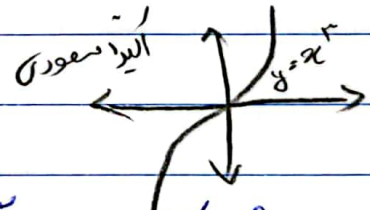
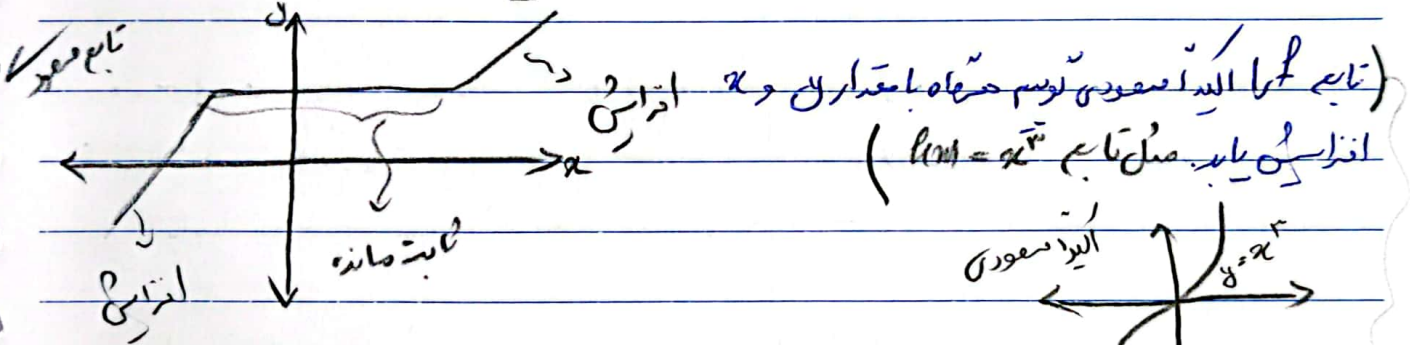
نوع: ضرب دو تابع زوج تابع زوج است. $P(x) = |x| \cdot \cos x$

ضرب دو تابع فرد تابع زوج است. $f(x) = x^2 \cdot \sin x$

ضرب دو تابع زوج تابع فرد است. $f(x) = |x| \cdot \sin x$

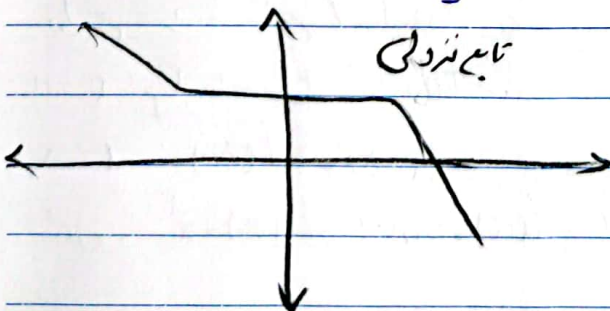
تابع صعودی و نزولی:

تابع f را صعودی گوئیم هرگاه با افزایش x مقدار $f(x)$ افزایش یابد و ثابت بماند.

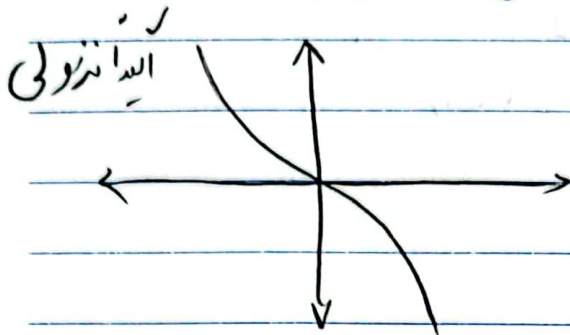


تابع f را اگر $f(x)$ صعودی گوئیم هرگاه با افزایش x مقدار $f(x)$ افزایش یابد.

تابع f را اگر نزولی گوئیم هرگاه با افزایش x مقدار $f(x)$ کاهش یابد یا ثابت بماند.



* تابع f را اگر f نزولی می‌توسیم حتماً با افزایش مقدار x مقدار $f(x)$ کاهش یابد.



* توابع f صعودی و f نزولی را اگر f بتوسیم.

توسیم: زوج یا فرد بودن توابع نیز را بدست می‌آید.

۱) $f(x) = x^2 + |x| - 2$ زوج

۲) $f(x) = x^3 + x$ فرد $\rightarrow D_f = \mathbb{R} \rightarrow f(-x) = (-x)^3 - x = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$ زوج فرد است

۳) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ فرد $\rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{-x} = -\frac{x^2 + 1}{x} = -f(x)$ زوج فرد است

۴) $f(x) = |x| \cdot \cos x$ زوج

۵) $f(x) = x^2 + x^3$ فرد $\rightarrow D_f = \mathbb{R} \rightarrow f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3 \neq f(x)$ و $\neq -f(x)$ زوج فرد است نه فرد

۶) $f(x) = x^3 \sqrt{x}$ فرد

۷) $f(x) = x^3 \sqrt{x}$ $\rightarrow D_f = [0, +\infty)$ زوج فرد است نه فرد

Subject:



Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$\cos^{-1} \quad \sin^{-1} \quad \tan^{-1} \quad \cot^{-1}$$

توابع معکوس مثلثاتی

$$\text{ARCCOS} \quad \text{ARCSIN} \quad \text{ARCTAN} \quad \text{ARCOT}$$

* ARCCOS ← می گویند آرک کسینوس

* $\cos^{-1}$ ← می گویند کسینوس اینوئرس

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

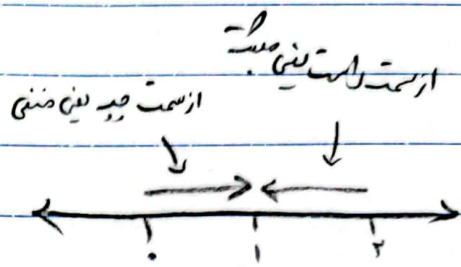
$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

امتیاز

حد: $\lim$ (لیمیت) = حد

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

x	$\rightarrow 1^-$	0.9	0.99	0.999
$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$		1.9	1.99	1.999
	$\rightarrow 2$			



x	$\rightarrow 1^+$	1.1	1.01	1.001
$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$		2.1	2.01	2.001
	$\rightarrow 2$			

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

وقتی x میل می کند به سمت 1

رفتار تابع در بی نهایت: $f(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$
در نقطه ای که نباید در دامنه آن باشد

x	$\rightarrow 0^-$	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x) = \frac{1}{x^2}$		100	10,000	1,000,000
	$\rightarrow \infty$			



x	$\rightarrow 0^+$	0.1	0.01	0.001
$f(x) = \frac{1}{x^2}$		100	10,000	1,000,000
	$\rightarrow \infty$			

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

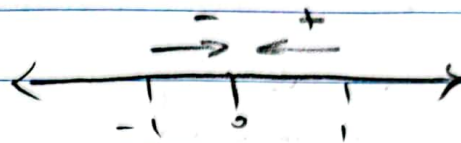
(۳) $f(x) = x^2 + 2x + 1$
 $D_f = \mathbb{R}$

در وقتی دامنه $\mathbb{R}$ باشد و فقط از شکل دایره
نداشتن به این که معادله را منفه یا مثبت نشود
بلکه هر نقطه ای که به ما می دهد فقط کافی است
جایگزین کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 1) = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$x \rightarrow 1$$

(۴) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \rightarrow D_f = [0 + \infty)$



$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$ چون داخل دامنه اندارد - وجود ندارد
منفی وجود ندارد.

در نقطه $x=0$ حد ندارد - در نتیجه

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$

حد: اگر محدود است و حد تابع f در نقطه $x=a$ وجود دارد و برابر با L است آنگاه
تابع f در نقطه $x=a$ دارای حد می باشد و این را می نویسیم:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

$x \rightarrow a$

نتیجه: اگر تابع f در نقطه $x=a$ دارای محدودیت و حد موجود و برابر با L باشد، تابع
 f در آن نقطه حد ندارد. مثل مثال ۴

مثال ۵) حد $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$ نامساوی است.

$x \rightarrow 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$

$x \rightarrow 1^+$



حد در این نقطه وجود ندارد و برابر نیست -

$\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0$

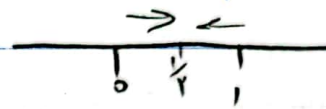
$x \rightarrow 1^-$

پس $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$ وجود نمی باشد

$x \rightarrow 1$

مسئله (۶) در $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [x]$ حساب کنید.

$$x \rightarrow \frac{1}{2}$$



$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} [x] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} [x] = 0$$

حد در این صورت وجود ندارد

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [x] = 0$$

$$x \rightarrow \frac{1}{2}$$

مسئله (۷) در تابع زیر، مقدار a و b را بیابید که در $x=2$ در نقطه $a=2$ به تریس a و b باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2bx; & x > 2 \\ 2ax - 2b; & x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2ax - 2b) \xrightarrow{\text{چون } x \text{ به } 2 \text{ میل کند}} 2a(2) - 2b = 4a - 2b = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax^2 + 2bx) \xrightarrow{\text{چون } x \text{ به } 2 \text{ میل کند}} 4a + 4b = 2$$

$$\begin{cases} 4a - 2b = 2 \\ 4a + 4b = 2 \end{cases} \xrightarrow{x=2} \begin{cases} 4a - 2b = 2 \\ 4a + 4b = 2 \end{cases} \rightarrow 4b = -2 \rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$4a - 2b = 2 \xrightarrow{b = -\frac{1}{2}} 4a - 2(-\frac{1}{2}) = 2 \rightarrow 4a + 1 = 2 \rightarrow 4a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

محاسبه حدتوانی :

① اگر دانه تابع f برابر R باشد آنگاه برای محاسبه حدتوانی f در نقطه a از دانه تابع f مقدار $f(a)$ در تابع f قرار نگیرد.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \xrightarrow{\text{جایگزینی}} \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + x) \xrightarrow{\text{جایگزینی}} (-1)^3 - 1 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x - 2} \xrightarrow{\text{جایگزینی}} \sqrt[3]{1 - 2} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

② در حالت $\frac{0}{0}$ باید رفع ابهام صورت نپذیرفتی حاصل صفر کننده صورت وخرج معلوم و حذف شود.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

خرج که صفر کننده صفر هست اما صورت صفر نمی شود اگر $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ می توانیم صفر حذف کنیم باید به صورت $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ در حاصل صفر را بیاوریم که در این صورت $(x - 1)$ صفر است

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 4}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 3)}{(x + 3)} \xrightarrow{\text{جایگزینی}} \frac{(2 + 3)}{(2 + 3)} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\frac{(2 + 3)}{(2 + 3)} = \frac{5}{5} = 1$$

* $\sqrt{x}$ برابر 1 است

* علامت مثبت و منفی نوشته با علامت در انتهای لیم

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

حل:

در صورتی که صورت و مخرج به ۰ می‌رسند.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)(\sqrt{x} + 1) = 4$$

مثال: تعیین حد زیر را با استفاده از قانون هسپیتال

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x - 1} \xrightarrow{\text{قانون هسپیتال}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 1}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - 1}{2 + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow 1$$

Subject:

Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----



$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{0}{0} \text{ (مطلوب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(x - 4)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \xrightarrow{\text{فاكتورسٹی}} \frac{-(4 - x)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \xrightarrow{\text{ساده سازی}} \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4} = \frac{(x - 4)}{(x - 4)(x - 1)} = \frac{1}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 4} \frac{1}{3}$$

مطلوب

حدی بی نهایت:

$$\frac{a}{0^+} \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases}$$

وقتی بی نهایت را تقسیم بر صفر کنیم

$$\frac{a}{0^-} \begin{cases} +\infty & a < 0 \\ -\infty & a > 0 \end{cases}$$

مفردی

تدریجاً صفر صفر
مفرد صفر

صفر صفر مفرد صفر
بی نهایت مفرد صفر

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

مکان:

Svbject:



Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

مثال

=>

نقیب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ وجود ندارد حتی اگر نوشتاری هم، هم علامت را برداریم

وجود ندارد چون عدایه یک در شقی بیگونی
در شقی نیست

نکته

$$a \times (+\infty) = \begin{cases} +\infty & ; a > 0 \\ -\infty & ; a < 0 \end{cases}$$

$$a \times (-\infty) = \begin{cases} -\infty & ; a > 0 \\ +\infty & ; a < 0 \end{cases}$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$(+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$0 \times (+\infty) = \text{مربع}$$

$$a + (+\infty) = +\infty$$

$$a - \infty = -\infty$$

$$+\infty - \infty = \text{مربع}$$

$$(-\infty)(-\infty) = +\infty$$

$$0 \times (-\infty) = \text{مربع}$$

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty} = \text{مربع}$$



Subject:

Year.

Month.

Date.

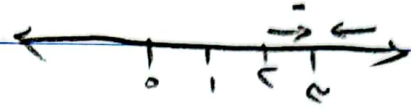
Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x-3} = \frac{4}{-1} = -4$$

مثال:

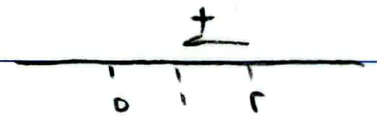
چون دهنه به سمت چپ می‌رود
ممنوع نیست
حال برای اینکه مطمئن کنیم منفی است
صفت چون از سمت چپ به ۳ نزدیک می‌شویم
به جای ۲ مثلاً ۱٫۷۵ جایگزین از ۳ می‌کنیم
۲۵- پس منفی است



تقریب: عدد زیر را به سمت چپ می‌آوریم.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+3}{1-x} = \frac{2(1)+3}{1-(1)} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

طبقه می‌شود



$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-1}{x^2} = \frac{3(0)-1}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$



$$3) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$



Svbject:



Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{\text{عدد}}{\pm \infty} = 0 \quad \text{نوعی ثابت}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x^n} = 0 ; n \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow \text{نوعی ثابت} \leftarrow \frac{\pm \infty}{\pm \infty} = \text{معلوم}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x+1} = \frac{+\infty}{+\infty} \xrightarrow{\text{رابطه ل'Hopital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x(2+\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

از آنجا که $x(1-\frac{1}{x})$ همواره مثبت است و x در برابر $\frac{1}{x}$ فزاینده می شود.

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{+\infty}{+\infty} \xrightarrow{\text{رابطه ل'Hopital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1} = x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

وقتی x بسیار بزرگ شود، $\frac{1}{x}$ بسیار کوچک می شود.

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x) = +\infty - \infty = \text{معلوم} \xrightarrow{\text{رابطه ل'Hopital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(1-\frac{2}{x}) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(1-\frac{2}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$



نوعی ثابت

Subject:

Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{2x^2 + 4} = \frac{+\infty}{+\infty} \xrightarrow{\text{فکتور}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 - \frac{2}{x})}{x(2x + \frac{4}{x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \frac{2}{x})}{(2x + \frac{4}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

در این مثال، توان صورت از توان مخرج کمتر باشد جواب صفر می شود. مثالی دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 10}{x^2 + 15} = 0$$

در این مثال، توان صورت و مخرج برابر است و جواب صفر می شود.

مثال

تقریباً حاصل صفر نیست، باید به

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 11x + 1) \xrightarrow{\text{حالت اول}} (-\infty + \infty + 1) \xrightarrow{\text{فکتور}} x^3 (5 - \frac{11}{x^2} + \frac{1}{x^3}) \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 (5 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - x^2}{2x^2 + 7x^4} \xrightarrow{\text{حالت دوم}} \frac{-\infty}{+\infty} \xrightarrow{\text{فکتور}} \frac{x(3 - \frac{x^2}{x})}{x(2x + 7x^3)} \xrightarrow{\text{فکتور}} \frac{(3 - x)}{(2x + 7x^3)}$$

$$\frac{x(-1 + \frac{3}{x})}{x(\frac{2}{x} + 7x^2)} = \frac{0}{0} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{3 - 2x^2} \xrightarrow{\text{حالت دوم}} \frac{+\infty}{-\infty} \xrightarrow{\text{فکتور}} \frac{x^2(1 + \frac{3}{x})}{x^2(\frac{3}{x^2} - 2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 + \frac{3}{x})}{(\frac{3}{x^2} - 2)} = \frac{1}{-2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 7x + 1}{2x^2 + 3} = \frac{+\infty}{+\infty} \xrightarrow{\text{نکته}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(5 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(2 + \frac{3}{x^2})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + \frac{7}{2x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2.5x = +\infty$$

بیرونی: تابع f در نقطه $x=a$ بیرونی نیست و همواره $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ مقدار تابع برابر باشد.

توجه: اگر یک تابع در نقطه $x=a$ حد داشته باشد، در آن نقطه ناپوشیده است.
مسئله: تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ در نقطه $x=1$ ناپوشیده است. آیا $f(1)$ هم موجود است؟

$$f(1) \text{ موجود نیست} \quad f(1) = \frac{0}{0} \quad \text{چون} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

$\Rightarrow$ پس تابع f در نقطه $x=1$ ناپوشیده است.
مسئله: بررسی بیرونی تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x=2$.

پس دلی مابین تقاطع و در حد

حل: چون تابع $f(x) = [x]$ در تقاطع حد ندارد پس تابع در نقطه $(x=2)$ ناپوشیده است

مسئله: متغیر a و پارامتر b تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2bx & ; x < 2 \\ 2 & ; x = 2 \\ -2ax - 2b & ; x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x=2$ ناپوشیده است.

بیرونی داشته باشد: * حد چپ و راست باید برابر باشد و در نقطه هم برابر باشد.

$$f(2) = 3$$

بررسی وجود در نقطه $x=2$ مفید بود

Subject:

Year.

Month.

Date.



Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

ابتداء عبارت با دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-2ax - 3b) = -4a - 3b$$

تابع در ۲

حال معبر را با دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 1bx) = 4a + 2b$$

تابع در ۲

نابراین برای اینکه تابع در نقطه $x = 2$ پیوسته باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} -4a - 3b = 3 \\ 4a + 2b = 3 \end{cases} \rightarrow b = 4$$

روش تفریق
دو معادله را منفرجه می کنیم

$$4a + 2b = 3 \xrightarrow{b=4} 4a + 2(4) = 3 \rightarrow 4a + 8 = 3$$

$$\rightarrow 4a = 3 - 8$$

$$\rightarrow a = \frac{-5}{4}$$

وظایف تعیین: مقادیر a و b را بیابان تعیین کنید که تابع f در نقطه x داده شده پیوسته باشد.

$$1) f(x) = \begin{cases} 2ax + b & ; x > -2 \\ a & ; x = -2 \\ bx^2 + 2x & ; x < -2 \end{cases}$$



NAFAS



Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$f(-2) = \Delta$$

ایک حد تک رابطہ ہے

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (ax + b) =$$

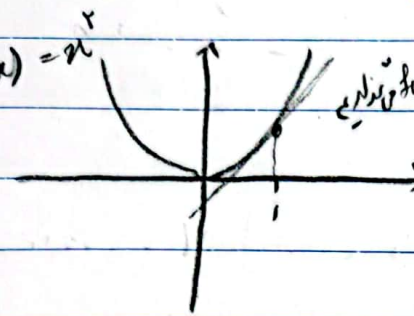
$$2) f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & ; x > 1 \\ ax - 3b & ; x < 1 \end{cases} ; x = 1$$

مشتق: فرض کنید f تابعی باشد و $a \in D_f$ آن. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ موجود باشد می نویسیم

تابع f در نقطه a مشتق پذیر است و مقدار این حد را با $f'(a)$ نشان می دهیم و آن را مشتق تابع f در نقطه a می نویسیم.

مثال: مقدار $f'(1)$ را برای تابع $f(x) = x^2$ با توجه به تعریف مشتق بدست آورید.

به طایفه این تابع مثال



$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

طریقه کتبه به این صورت بود:

توجه: دلیلی برای $f'(x)$ از تعریف زیر استفاده کرد:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مثال: اگر $f(x) = x^2$ مطلوب است $f'(x)$. این تابع را به این صورت می نویسند

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

طبق این روش می توانیم

$$f'(1) = \lim 2x = 2(1) = 2$$

$$f'(4) = \lim 2(x) = 2(4) = 8$$

* متوجه باشید که این روش برای همه توابع از مشتق است

توانین مشتق :

۱) $f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$ ← مشتق هر عدد ثابت صفر می باشد
مثال: $f(x) = 5 \rightarrow f'(x) = 0$

۲) $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ ← مشتق
مثال: $f(x) = x^{10} \rightarrow f'(x) = 10x^9$

۳) $f(x) = k g(x) \rightarrow f'(x) = k g'(x)$ ← مشتق
مثال: $f(x) = 3x^5 \rightarrow f'(x) = 3(5x^4) = 15x^4$
در اینجا $k=3$ و $g(x)=x^5$ است.

۴) $f(x) = g(x) \pm h(x)$

$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$ ← مشتق
مثال: $f(x) = x^5 + 2x^3 + 1$
 $f'(x) = 5x^4 + 6x^2$
در اینجا $g(x)=x^5$ و $h(x)=2x^3+1$ است.

۵) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

مثال :

$$f(x) = (x^5 + x^3)(x-1)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^5 + x^3)'(x-1) + (x-1)'(x^5 + x^3) \\ &= (5x^4 + 3x^2)(x-1) + (1)(x^5 + x^3) \end{aligned}$$

7) $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$ در صورتی که در صورت و مخرج تابع مشتق پذیر باشد طبق این فرمول می توانیم مشتق حساب کنیم

مثال: $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1} \Rightarrow \left(\frac{x^2 + x}{x - 1} \right)' = \frac{(x^2 + x)' \cdot (x - 1) - (x - 1)' \cdot (x^2 + x)}{(x - 1)^2}$
 $= \frac{(2x + 1) \cdot (x - 1) - (1) \cdot (x^2 + x)}{(x - 1)^2}$

✓ مثال: برای مشتق تابعی که به صورت $f(x) = \sqrt{x}$ باشد می توانیم بنویسیم $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ در صورتی که در صورت و مخرج تابع مشتق پذیر باشد
 $f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 جواب: مشتق $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

✓ مثال: $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$
 $f'(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -1 x^{-2} = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ جواب: $-\frac{1}{x^2}$

مثال: $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} - x^2$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} - 2x$

Subject:

Year.

Month.

Date.



Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{r}{x} \right) (x^r + rx - 1)$$

جواب

$$f'(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{r}{x} \right)' (x^r + rx - 1) + (x^r + rx - 1)' \left(\sqrt{x} + \frac{r}{x} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{r}{x^2} \right) (x^r + rx - 1) + (rx + r) \left(\sqrt{x} + \frac{r}{x} \right)$$

$$h(x) = (\sqrt{x} + \frac{1}{x})(x^2 + 2x - 1)$$

مثال ۱

$$f'(x) = (\sqrt{x} + \frac{1}{x})'(x^2 + 2x - 1) + (x^2 + 2x - 1)'(\sqrt{x} + \frac{1}{x})$$

$$= (\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2})(x^2 + 2x - 1) + (2x + 2)(\sqrt{x} + \frac{1}{x})$$

این دوون $\frac{1}{x}$ قسمت به صورت x^{-1} در نظر بگیر

$$v) h(x) = (3x^2 + \sqrt{x} - 1)^4$$

تکانه u تا می بریم و مشتق می گیریم

$$(u^n)' = n u^{n-1} u'$$

در داخل به مشتق می گیریم

$$\Delta (3x^2 + \sqrt{x} - 1)^4 (4x + \frac{1}{2\sqrt{x}})$$

$$f(x) = (x^2 + x)^2 (x - \frac{1}{x})$$

مثال ۲

$$f'(x) = ((x^2 + x)^2)' \cdot (x - \frac{1}{x}) + (x - \frac{1}{x})'(x^2 + x)^2$$

این دوون $\frac{1}{x}$ قسمت به صورت x^{-1} در نظر بگیر

$$f'(x) = 2(x^2 + x)(2x + 1) \cdot (x - \frac{1}{x}) + (1 + \frac{1}{x^2})(x^2 + x)^2$$

$$((\sqrt{x})^4)' = 4(\sqrt{x})^3 (\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

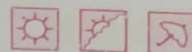
مثال ۳

$$h(x) = \sqrt{x^2 + x} = (x^2 + x)^{\frac{1}{2}}$$

مثال ۴

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}}(2x + 1) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

Subject:



Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - x)^2}$$

$$f(x) = (x^2 - x)^{\frac{2}{3}}$$

اربعین و دوام توانی شکر

✓

$$f'(x) = \frac{1}{3} (x^2 - x)^{-\frac{1}{3}} (2x - 1)$$

مشتق ضمیمه توانی شکر

$$= \frac{(2x - 1)}{3(x^2 - x)^{\frac{1}{3}}}$$

صیاد داخل مخبر صیادتی شود

$$= \frac{2x - 1}{3\sqrt[3]{(x^2 - x)^2}}$$

کسی مخبر ما از بین و بیرون ۱/۳ برابر اقبال شکر

مشتق توانی شکر

$$f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$f(x) = \cot x \rightarrow f'(x) = -(1 + \cot^2 x)$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - x} \rightarrow f'(x) = \frac{(\sin x)'(\cos x - x) - (\cos x - x)'(\sin x)}{(\cos x - x)^2}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{\cos x (\cos x - x) - (-\sin x - 1)(\sin x)}{(\cos x - x)^2}$$



NOTE BOOK

NAFAS

Svbject:

Year.

Month.

Date.



Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$f(x) = \cos x (1 + \tan x) \quad \text{فرد به توانیم}$$

$$f'(x) = (\cos x)' (1 + \tan x) + (1 + \tan x)' (\cos x)$$

$$f'(x) = -\sin x (1 + \tan x) + (1 + \tan' x) (\cos x)$$

$$(1 + \tan x)^a \quad \leftarrow \quad \tan^a x \neq \tan x^a$$

مشتق توابع مثلثاتی: (مشتق مستقیم $\times$ مشتق توانی $\times$ مشتق توانی)
 مشتق توانی: $\tan^a x$
 مشتق مستقیم: $\tan x$

$$\checkmark \text{ مثال: } f(x) = \tan^a x$$

$$\rightarrow f'(x) = (a \tan^{a-1} x) (1) (1 + \tan^2 x)$$

$$\checkmark \text{ مثال: } f(x) = \sin^2 \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = (2 \sin \sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) (\cos \sqrt{x})$$

$$\checkmark \text{ مثال: } f(x) = 2 \cos^3 \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$\rightarrow f'(x) = (4 \cos^2 \frac{1}{x}) \left(-\frac{1}{x^2} \right) (-\sin \frac{1}{x})$$

$$* (e^u)' = e^u \rightarrow e \approx 2.718 \quad \text{مشتق توانی: } e^u$$

$$* (e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$\checkmark \text{ مثال: } f(x) = e^{\sin x + \sqrt{x}} \rightarrow f'(x) = (\sin x + \sqrt{x}) \cdot e^{\sin x + \sqrt{x}} \\ \rightarrow f'(x) = \left(\cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cdot e^{\sin x + \sqrt{x}}$$

Subject:

Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$JL: f(x) = \frac{e^x}{x-1} \rightarrow \frac{(e^x)'(x-1) - (x-1)'(e^x)}{(x-1)^2}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{e^x(x-1) - (1) \cdot e^x}{(x-1)^2}$$

مشتق توابع لگاریتمی

$$* (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$* (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$JL: f(x) = \ln \sin x \rightarrow f'(x) = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

طبق مشتق مستقیم

$$مثال: f(x) = \ln(e^x + \cos \sqrt{x})$$

$$\rightarrow \frac{(e^x + \cos \sqrt{x})'}{e^x + \cos \sqrt{x}} \rightarrow \frac{e^x + \frac{1}{\sqrt{x}}(-\sin \sqrt{x})}{e^x + \cos \sqrt{x}}$$

$$\leftarrow \checkmark \Rightarrow f' = \frac{df}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

مثلاً: برای هر دو تابعی که در کنار هم قرار می‌دهیم، مشتق می‌گیریم

در خانه

تمرین: مشتق توابع زیر را به دست آورید

$$1) f(x) = 3 \cos x - x \sin x$$

$$: (3 \cos x)' - (x \sin x)', \text{ مشتق می‌گیریم}$$

$$: (3(-\sin x)(1)) - ((x)'(\sin x) + (\sin x)'(x))$$

$$= 3(-\sin x) - ((1)(\sin x) + (\cos x)(x))$$

$$= -3 \sin x - \sin x - (\cos x)(x) \Rightarrow -4 \sin x - \cos x(x)$$



NAFAS

Subject:

Year.

Month.

Date.



Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= e^x \sin^r x \Rightarrow f'(x) = (e^x)'(\sin^r x) + (\sin^r x)'(e^x) \\ &\Rightarrow = e^x (\sin^r x) + (r \sin^{r-1} x \times \cos x) e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) f(x) &= x^r \ln x \Rightarrow \\ f'(x) &= (x^r)'(\ln x) + (\ln x)'(x^r) \\ &\Rightarrow = (rx^{r-1})(\ln x) + \left(\frac{1}{x}\right)(x^r) \\ &\Rightarrow = rx^{r-1} \ln x + x^{r-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) f(x) &= e^x \sin rx \\ f'(x) &= (e^x)'(\sin rx) + (\sin rx)'(e^x) \\ &\Rightarrow = (e^x)(\sin rx) + (\cos rx)(r)(1)(e^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) f(x) &= (x^r + x)(e^x + 1) \\ &\Rightarrow = (x^r + x)'(e^x + 1) + (e^x + 1)'(x^r + x) \\ &\Rightarrow = (rx^{r-1} + 1)(e^x) + (e^x)(x^r + x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) f(x) &= e^x \cos e^x \\ &\Rightarrow = (e^x)'(\cos e^x) + (\cos e^x)'(e^x) \\ &= (e^x)(\cos e^x) + ((-\sin e^x)(e^x))(e^x) \\ &\Rightarrow = e^x \cos e^x - e^{2x} \sin e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) f(x) &= \tan(rx + 1) \\ &\Rightarrow (1 + \tan^2(rx + 1))(r) \end{aligned}$$

$$v) f(x) = \ln(\cos rx) \\ \Rightarrow \frac{(\cos rx)'}{(\cos rx)} = \frac{(-\sin rx)(r)}{(\cos rx)}$$

$$1) f(x) = \sin^r(ax) \\ \Rightarrow ((r \sin^r(ax))(\cos ax)(a))$$

$$1) f(x) = \cos(\ln x) \\ \Rightarrow -\sin(\ln x) \left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$$

$$10) f(x) = (rx - x^r)^a \Rightarrow a(rx - x^r)^{a-1} (rx - x^r)' \\ \Rightarrow a(rx - x^r)^{a-1} (r)(-rx^{r-1})$$

$$11) f(x) = (x^{r+1})^a (x^r - x)^r \\ \Rightarrow ((x^{r+1})^a)' (x^r - x)^r + ((x^r - x)^r)' (x^{r+1})^a \\ \Rightarrow a(x^{r+1})^{a-1} (rx) (x^r - x)^r + r(x^r - x)^{r-1} (rx^r) (-1) (x^r)$$

$$12) f(x) = (r + \ln x)(e^x + r) \\ \Rightarrow (r + \ln x)'(e^x + r) + (e^x + r)'(r + \ln x) \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)(e^x + r) + (e^x)(1 + \ln x)$$

$$1) y = x^2$$

تابع صریح: تابعی به شکل $y = f(x)$ را تابع صریح می‌گویند. مثال

$$2) y = \sin x + \cos x$$

$$3) y = \ln x + x - 1$$

تابع ضمنی: تابعی به صورت $f(x, y) = 0$ که در آن x و y به صورت x و y بیان شده باشد

$$1) x^2 + y^2 = 1$$

تابع ضمنی توابع مثال

$$2) x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 0$$

$$3) \sin(x+y) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad y' = ?$$

$$2x + 2y y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

راه حل اول: در این حالت x و y را تابع مشتق پذیر از x فرض می‌کنیم و از فرمول مشتق به x مشتق می‌گیریم پس از معادله جدید x را بدست می‌آوریم.

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

راه حل دوم: داریم روش بیان کلیه $f(x, y) = 0$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم

$$y' = -\frac{f_x}{f_y}$$

f_x : مشتق تابع نسبت به x مشتق می‌گیریم.

f_y : مشتق تابع نسبت به y مشتق می‌گیریم.

مثال: مشتق ضمنی تابع $x^2 y^2 + x^2 y + x = y$ را بیابید.

$$x^2 y^2 + x^2 y + x = y \Rightarrow f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 y + x - y = 0 \Rightarrow$$

$$f_x = 2xy^2 + 2xy + 1$$

$$f_y = 2x^2 y + x^2 - 1$$

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2xy^2 + 2xy + 1}{2x^2 y + x^2 - 1}$$

مشتق مراتب بالاتر: اگر f تابعی مشتق پذیر باشد در این صورت f موجود است
 ضایع f تابعی مشتق پذیر باشد در این صورت مشتق کن را با f' نشان می دهیم
 افزودن (مشتق مرتبه دوم)

"مشتق مرتبه دوم تابع f است
 به همین ترتیب مشتق مرتبه سوم تابع f را به صورت f''' نشان می دهیم
 افزودن مشتق

به طور کلی $f^{(n)}$ به معنای مشتق مرتبه n ام تابع f است. و بنا به (n) درجه انداز بار
 $f'' = f^{(2)}$

مشتق مرتبه n ام $f^{(n)}$
 تفاوت بین f و f'
 معنی مشتق مرتبه دوم
 معنی اینکه تابع چند بار در فرمولی ضرب کنیم

مثال: مشتق مرتبه ۱۰ ام تابع $f(x) = x^5 + x^2 - 2x + 1$ را به دست آورید

$$f(x) = x^5 + x^2 - 2x + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 + 2x - 2$$

$$f''(x) = 20x^3 + 2$$

$$f'''(x) = 60x^2$$

$$f^{(4)}(x) = 120x$$

$$f^{(5)}(x) = 120$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \Rightarrow f^{(n)}(x) = 0, n > 5$$

یعنی مشتق مرتبه (5) ام به بعد برابر صفر است

$$۴! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$



Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

مثال: مشتق مرتبه ۱۲۰ از $y = \sin x$ را بیابید

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x \Rightarrow y''' = -\cos x \Rightarrow y^{(4)} = \sin x$$

$$\Rightarrow y^{(5)} = \cos x \Rightarrow y^{(6)} = -\sin x \Rightarrow y^{(7)} = -\cos x \Rightarrow y^{(8)} = \sin x$$

$$\vdots$$

$$y^{(120)} = \sin x$$

مثال: رابطه‌ی بین y و x را برای $y = \ln x$ بیابید

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow y''' = -\frac{(-1)(x^2) - (1)(2x)}{(x^2)^2} = +\frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$y^{(4)} = -\frac{6}{x^4} \Rightarrow y^{(5)} = \frac{24}{x^5}$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

تذکره: در روابط مشتق زیر، y را به دست آورید

$$1) x^r + y^r = rxy + r$$

$$2) x \cos y + y \cos x = 1$$

Subject:



Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$3) x^2 y'' - 4xy' = 8 - 3y$$

تمرین ۱ رابعه ای برای محاسبه مشتق مرتبه $\ln$ و e^{ax} به دست آورید.

$$3) 3x^4y^2 - 7xy^2 = 1 - 3y \Rightarrow f(x, y) = 3x^4y^2 - 7xy^2 - 1 + 3y$$

$$f_x = 12x^3y^2 - 7y^2$$

$$f_y = 6x^4y - 7x + 3 \Rightarrow y' = \frac{f_x}{f_y} = \frac{12x^3y^2 - 7y^2}{6x^4y - 7x + 3}$$

تعیین رابطه‌ای برای تابع مستقیم مرتبه n در ax به صورت $y = e^{ax}$

$$y = e^{ax} \Rightarrow y' = (ax)' \cdot e^{ax} \Rightarrow y' = (a) \cdot e^{ax} = ae^{ax}$$

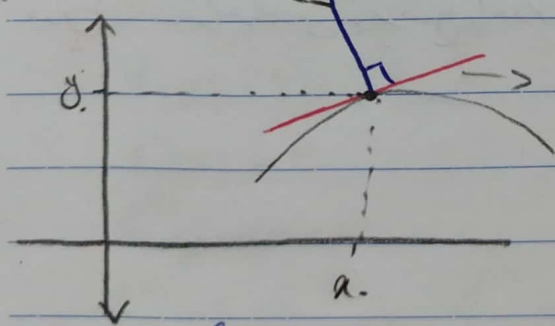
$$y'' = a(ae^{ax}) = a^2e^{ax}$$

$$y''' = a^2(ae^{ax}) = a^3e^{ax}$$

$$y^{(n)} = a^n e^{ax}$$

رابطه‌های مستقیم

مماس بر منحنی در نقطه A



① خط مماس و قائم بر منحنی:

معادله خط به صورت $y = mx + b$ می‌باشد. m شیب خط و b عرض از مبدأ می‌باشد.

توجه: اگر L_1 خطی با شیب m_1 و L_2 خطی با شیب m_2 باشد و این دو خط بر هم عمود باشند آن‌گاه $m_1 \times m_2 = -1$ است.

Subject:



Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

تیم: معادله خطی توان با برآیند داشتن دو نقطه و یک نقطه و یک معادله خطی توان به صورت اکوید

① حالت اول: در صورتی که $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه از خط باشند معادله خطی توان به صورت زیر نوشته می شود.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$x - x_1 \quad x_2 - x_1$$

مثال: اگر معادله خطی گذرنده از دو نقطه $A(2, 1)$ و $B(4, 5)$ را به صورت اکوید

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{شیب خط}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = 2 \quad \text{طبق نقطه } (x_1, y_1)$$

$$\rightarrow \frac{y - 1}{x - 2} = 2 \rightarrow y - 1 = 2x - 4 \rightarrow y = 2x - 3$$

حالت دوم: در صورتی که $A(x_1, y_1)$ نقطه ای روی خط و m شیب خط باشد معادله خطی توان به صورت زیر به دست می آید.

$$y - y_1$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

آنها هم از نقطه $A(x_1, y_1)$ مشتق پذیر باشد معادله خطی توان در صورتی که این نقطه از رابطه زیر به دست می آید.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = f'(x)$$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $x_1 = 4$ را بدست آورید.

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m = f'(x) \Rightarrow$$

$\downarrow$
 $x_1 = 4$

$$m = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$y_1 = f(4) = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow$$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x + 1}$$

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $A(4, 2)$

* اگر تابع f در نقطه $A(x_1, y_1)$ مشتق نپذیرد، معادله خط قائم بر منحنی در این نقطه

از رابطه زیر بدست می آید:

$$y - y_1 = m'(x - x_1) \quad , \quad m' = -\frac{1}{m}$$

مثال: معادله خط قائم بر منحنی $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $x_1 = 4$ را بدست آورید.

دارد مماس عمود بر آن

$$y - y_1 = m'(x - x_1)$$

$$y - 2 = -4(x - 4)$$

$$y = +2 - 4x + 16$$

$$\boxed{y = -4x + 18}$$

$$m' = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -4$$

مثال: معادله خط مماس و قائم بر منحنی تابع $f(x) = x + e^x$ در نقطه $x_1 = 0$

در سمت اکویر

$$f'(x) = x + e^x \Rightarrow f'(x_1) = (1) + e^x \Rightarrow m = f'(0) = (1) + e^0 = 1 + 1 = 2$$

$x_1 = 0$

$$y_1 = f(x_1) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow$$

$$y - 1 = 2(x - 0) \Rightarrow y = +1 + 2x \Rightarrow \boxed{y = 2x + 1}$$

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $A(0, 1)$

$$y - y_1 = m'(x - x_1) \quad m' = -\frac{1}{2}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = +1 - \frac{1}{2}x \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$$

معادله خط قائم بر منحنی در نقطه $A(0, 1)$

قاعده هسپیتال: اگر $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$x \rightarrow a \quad x \rightarrow a$$

به عبارت دیگر، اگر مقدار یک حد به صورت $\frac{0}{0}$ در این صورت می توان از صورت دیگر مستقیماً نسبت و برای عبارت جدید مقدار حد را محاسبه نمود

نقشه ۱) قاعده هسپیتال نامی توان برای حالت $\frac{\infty}{\infty}$ هم استفاده کرد.

نقشه ۲) نمودار در مقدار (مقادیر) استفاده از این قاعده در صورت به قدری که

وجود ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow$$

مسئله: قاعده هسپتال (H)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 4}{x^5 - x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 2}{5x^4 - 1} = \frac{4}{4} = 1$$

مسئله: قاعده هسپتال

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x - 2}{12x + 2} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

مسئله: قاعده هسپتال

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x - 2}{12x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{12} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

مسئله: قاعده هسپتال

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x)'(\ln x) + (x \ln x)'(x)}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1(\ln x) + (1/x)x}{2x} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

Svbject:

1. $\cos 0 = 1$ و $\sin 0 = 0$ براسر صفتی بود.



Year. Month. Date. Sa Su Mo Tu We Th Fr

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{0 - \sin 0}{0 \cdot \sin 0} = \frac{0}{0}$$

قانون هسپتال

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(x)'(\sin x) + (\sin x)'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + \cos x(x)}$$

مشتق صورت
مشتق مخرج

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{\sin 0}{\cos 0 + \cos 0 - 0} = \frac{0}{2} = 0$$

مشتق بی نهایت

تمرین ۱: عارلم فلوفا اس مقام بر صفتی توابع زیر در نقاط داده شده باید.

- ۱) $f(x) = x^2 + x + 1$; $x_1 = 1$
- ۲) $f(x) = (x-1)^2 + 2$; $x_1 = 1$
- ۳) $x^2 + y^2 - 2y = 4$; $A(-1, 2)$

تمرین ۲: یک قانون هسپتال، مورد توابع زیر را بدست آورید.

- ۱) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}$
- ۲) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x - \cos 2x + 1}$

- ۳) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{2x^2 - x - 1}$

- ۱) $f(x) = x^2 + x + 1$; $x_1 = 1$
 $m = f'(x) = 2x + 1 \xrightarrow{x_1=1} m = 2(1) + 1 = 3$
 $y = x^2 + x + 1 \xrightarrow{x_1=1} y = (1)^2 + 1 + 1 = 3$
 $y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 3 = 3(x - 1) \rightarrow y = 3 + 3x - 3 \rightarrow y = 3x$
 $m' = -\frac{1}{3} \rightarrow y - y_1 = m'(x - x_1) \rightarrow y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 1) \rightarrow$
 $y = 3 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$



NAFAS

عارلم فلوفا؟ بر صفتی

Subject:

Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$2) f(x) = (x-1)^2 + 2 \quad ; x_1 = 1$$

$$m = f'(x) = 2(x-1)^1 \times 1 \quad x_1=1 \quad m = 2(1-1)^1 = 0$$

$$y_1 = (x-1)^2 + 2 \quad x_1=1 \quad y = (1-1)^2 + 2 \Rightarrow y = 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 2 = 0(x - 1) \rightarrow y = 2$$

خط مماس

$$m' = -\frac{1}{m} \rightarrow \text{مماس عمودي}$$

$$3) x^2 + y^2 - 2y = 5 \quad ; A(-1, 2)$$

$$m = f'(x) = \frac{-f_x}{f_y} \quad \begin{matrix} f_x = 2x \\ f_y = 2y - 2 \end{matrix}$$

$$m = \frac{-2x}{2y-2} \rightarrow \frac{-2(-1)}{2(2)-2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 2 = 1(x - (-1)) \rightarrow y = +2 + 1x + 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{1}x + \frac{3}{1}$$

معادله خط مماس

$$m' = -\frac{1}{m} = m' = -1 \rightarrow y - y_1 = m'(x - x_1)$$

$$\rightarrow y - 2 = -1(x - (-1))$$

$$\rightarrow y = +2 - 1x - 1 \rightarrow y = -1x + 1$$

معادله خط مماس عمودي

نیز می‌توانید با استفاده از فرمول

Subject:



Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{\sin 3(0)}{2(0)} = \frac{0}{0}$$

$$(H) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} \stackrel{\text{منقح صورت}}{=} \frac{(\cos 3x)(3)(1)}{(2)} = \frac{3 \cos 3x}{2} \stackrel{\text{منقح صورت}}{=} \frac{3 \cos 3(0)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x - \cos 2x + 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{\sin 2(0) - \cos 2(0) + 1}{\sin 2(0) - \cos 2(0) + 1} = \frac{0 - 1 + 1}{0 - 1 + 1} = \frac{0}{0}$$

$$H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x - \cos 2x + 1} \stackrel{\text{منقح صورت}}{=} \frac{((\cos 2x)(2)(1)) - ((-\sin 2x)(2)(1))}{((\cos 2x)(2)(1)) - ((-\sin 2x)(2)(1))}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{((\cos 2(0))(2)(1)) - ((-\sin 2(0))(2)(1))}{((\cos 2(0))(2)(1)) - ((-\sin 2(0))(2)(1))} = \frac{2}{2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 2x^3 + x + 1}{x^5 - x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1 - 2 + 1 + 1}{1 - 1 - 1} = \frac{0}{0} \quad H$$

$$\stackrel{\text{منقح صورت}}{=} \frac{5x^4 - 6x^2 + 1}{5x^4 - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{5(1)^4 - 6(1)^2 + 1}{5(1)^4 - 1} = \frac{-2}{4}$$

Subject:

۱۴۰۲، ۹، ۲۳

Year.

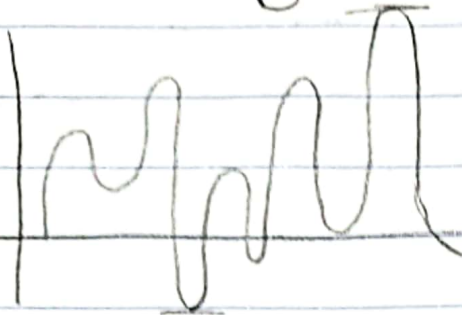
Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

الاستیکم یعنی (میدینیم - ماکزیمیم)

Max - مطلق



Min - مطلق

الاستیکم های نسبی

ماکسیمم مطلق یعنی بالاترین Max

میدینیم مطلق یعنی پایین ترین Min

تعریف: نقطه $C \in D_f$ را به نقطه بحرانی می گویند هرگاه $f'(C) = 0$ یا $f'(C)$ موجود نباشد.

تفاوت بحرانی مانند برای نقطه الاستیکم می باشند. اگر تابعی نقطه بحرانی نداشته باشد، الاستیکم نسبی هم ندارد.

نکته: نقطه یا تفاوت بحرانی تابع زیر را بیابید.

$$1) f(x) = x^2 + 2x + 3 \rightarrow f'(x) = 2x + 2 \xrightarrow{\text{برای به صفر رساندن}} 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{2} = -1$$

که نقطه بحرانی

$$2) f(x) = x^3 + 2x + 1 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2 \xrightarrow{\text{برای به صفر رساندن}} 3x^2 = -2$$

یا ندارد

این معادله جواب ندارد در نتیجه تابع f نقطه بحرانی ندارد.

چون هیچ وقت $3x^2$ برابر -2 نمی شود.

اگر $C \in D_f$ یک نقطه بحرانی تابع f باشد در این صورت اگر $f'(C) > 0$ و $f'(C) < 0$ نقطه

بحرانی C ، میدینیم نسبی است.

اگر $C \in D_f$ یک نقطه بحرانی تابع f باشد در این صورت اگر $f'(C) > 0$ و $f'(C) < 0$ نقطه

بحرانی C ، ماکزیمیم نسبی است.

مکان: تاریخ: یا نقاط بحرانی تابع زیر را بیابید.

۱) $f(x) = x^2 + 2x + 2 \rightarrow f'(x) = 2x + 2 \xrightarrow{\text{باید صفر}} 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1$

عدد قبل از - استقام می کند
مشتق مثبتی صفر

x	-1
f'	- 0 +

اگر از دست راست از - می گذریم
اگر از چپ می رسیم
می شود

* پس نقطه $x = -1$ نقطه min است

۲) $f(x) = x^2 + 1 \rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

x	0
f'	+ 0 +

چون مشتق در اطراف $x = 0$ تغییر علامت ندارد یعنی هر دو رو به اف می باشد

این نقطه بحرانی اکسترم نمی نیست

آنها دو تا ش هم مشتق بود چون تغییر علامت ندارد اکسترم نمی باشد

و نت نقطه بحرانی اکسترم نمی باشد با سه می نویسد نقطه کفاف

تمرین: نقاط اکسترم سنی توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x) = 3 - x - x^2$

۲) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

۳) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$

۴) $f(x) = 2x^3 - 2^4$

Subject:

Year.

Month.

Date.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

$$1) f(x) = -x^2 - x \rightarrow f'(x) = -1 - 2x \rightarrow -1 - 2x = 0$$

$$\rightarrow -2x = +1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

نقطه بحرانی

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$-\infty$
f'	$+$	0	$-$
	$\nearrow$		$\searrow$



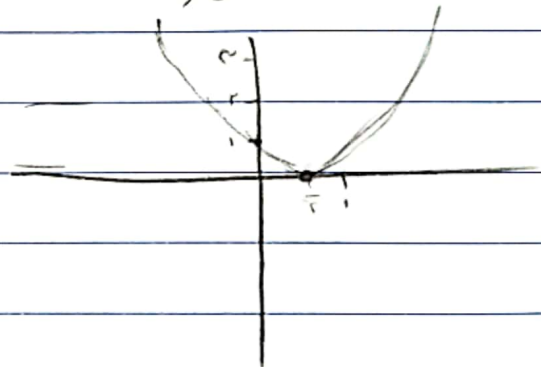
نقطه بحرانی Max

$$2) f(x) = x^2 - x + 1 \rightarrow f'(x) = 2x - 1 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

نقطه بحرانی

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$+\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$

$$f(x) = x^2 - x + 1 \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$$



نقطه بحرانی Min

$$3) f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2 \rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6x \rightarrow -3x^2 + 6x = 0$$

$$-3x(x - 2) \rightarrow x = 0, x = 2$$

	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		min		Max	

Svbject:



Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$\hookrightarrow f(x) = x^5 - x^4 \rightarrow f'(x) = 5x^4 - 4x^3 \xrightarrow{\text{factor}} x^3(5x - 4)$$

x	-1	0	1
f'	+	0	-

Arrows indicating the sign change from + to - at $x=0$ and $x=1$.

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Subject:

انتگرال



Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

حاصل ما تابع می ده

نامعین

انتگرال

حاصل ما در می ده

معین

غادگی

حاصل ما تابع می ده

حاصل ما در می ده

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

تابعی بوده است که

مشتقش $\frac{1}{x}$ شد

$$\int x^2 dx = x^3 + C$$

تابعی بوده است که مشتقش x^2 شد

برخی فرمول در انتگرال گیری :

$$* \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$\text{مثال: } \int x^2 dx = \frac{1}{2+1} x^{2+1} + C = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$* \int k dx = kx + C$$

$$\text{مثال: } \int 2 dx = 2x + C$$



NAFAS

Subject:



Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$* \int dx = x + C$$

$$* \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$* \int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad \text{Constant k}$$

$$\text{جواب: } \int \frac{1}{x^r} dx = x^{-r} dx = \frac{1}{-r+1} x^{-r+1} + C = \frac{1}{-r} x^{-r} + C$$
$$= \frac{1}{-r x^r} + C$$

$$\text{جواب: } \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

$$\text{جواب: } \int x^r dx = \int \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C = \frac{1}{r} x^r + C = \frac{x^r}{r} + C$$

$$\text{جواب: } \int x^9 dx = \frac{x^{10}}{10} + C$$

بالتعويض

$$\text{جواب: } \int (x+1)^9 dx = \int u^9 du = \frac{u^{10}}{10} + C = \frac{(x+1)^{10}}{10} + C$$

$u = x+1$

Subject: ماتریکس

Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

$$(\sin x)' = \cos x \rightarrow \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$(\cos x)' = -\sin x \rightarrow \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \rightarrow \int (1 + \tan^2 x) \, dx = \tan x + C$$

$$(e^x)' = e^x \rightarrow \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \rightarrow \int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$$

$$\text{مثال: } \int \sin kx \, dx \xrightarrow{\text{تبدیل متغیر}} \int \sin t \cdot \frac{dt}{k} = \frac{1}{k} \int \sin t \, dt$$

$$\begin{aligned} kx &= t \\ k \, dx &= dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k} (-\cos t) + C$$

$$= -\frac{1}{k} \cos kx + C$$



$$\int \tan x \, dx = - \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \ln(\cos x) + C$$

تھو دینے سے متعلق صورت سوچا کر دیکھو

ایک ہی طرح کا ہے، لگاتار دیکھو

$$\int \frac{1}{x+1} \, dx = \frac{1}{r} \int \frac{r}{x+1} \, dx = \frac{1}{r} \ln(x+1) + C$$

$$\int \frac{x^r}{x^r+1} \, dx = \frac{1}{r} \int \frac{r x^r}{x^r+1} \, dx = \frac{1}{r} \ln(x^r+1) + C$$

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \, dx = \ln(\sin x + \cos x) + C$$

مشتق ایسا داخل ہوگا کہ
جیسے

$$\begin{aligned} \int x e^x \, dx &= \int e^x x \, dx & x' &= t \\ & & r x \, dx &= dt \\ & & x \, dx &= \frac{dt}{r} \\ &= \int e^t \frac{dt}{r} = \frac{1}{r} \int e^t \, dt = \frac{1}{r} e^t + C = \frac{1}{r} e^x + C \end{aligned}$$

Subject:

Year.

Month.

Date.



Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

اول درجہ

$$1) \int x \sin(x^2+1) dx$$

$$1) \int \frac{x+1}{(x^2+x)^r} dx$$

$$c) \int (x^2 - 2x + 1) dx$$

$$e) \int \frac{e^x}{e^x + e} dx \rightarrow = \ln(e^x + e) + C$$

صنق فنجی ترکی صورت دلیر

$$u) \int \cos x \cdot e^{\sin x} dx$$

Subject:

Year.

Month.

Date.

Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr
----	----	----	----	----	----	----

انتقال صحن

انتقال صحن

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

انتقال صحن

جواب:

$$\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = (2.718) - 1 = 1.718$$